Beta

p-ISSN: 2085-5893

e-ISSN: 2541-0458

Vol. 6 No. 1 (Mei) 2013, Hal. 46-57

TEOREMA KEKONVERGENAN FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL SERENTAK DAN FUNGSI BERSIFAT LOCALLY SMALL RIEMANN SUMS (LSRS) DARI RUANG EUCLID $\Re^n$ KE RUANG BARISAN ℓ^p, $(1 \le p < \infty)$

Aniswita[1]

Abstract: In this paper we discuss Henstock Equi α-integrable and Uniformly Locally Small Riemann Sums (UESRS) properties for Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean spaces $\Re^n$ into the Sequences space $\ell^p, (1 \le p < \infty)$

Keywords: Henstock Equi α-integrable, Uniformly Locally Small Riemann Sums (UESRS) and Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean spaces $\Re^n$ into the Sequences space $\ell^p, (1 \le p < \infty)$

A. PENDAHULUAN

Pada tahun 1960, Henstock dan Kurzweil secara terpisah mengitlakkan integral Riemann dengan mengubah konstanta δ menjadi fungsi positif δ dan ternyata integral yang di susun ekuivalen. Oleh karena itu integral tersebut dikenal dengan integral Henstock-Kurzweil atau integral Riemann yang diperluas (Gordon, 1994).

Integral ini mendapat perhatian yang sangat besar dari para peneliti, berbagai penelitian dilakukan untuk menggali sifat-sifat dan aplikasinya. Diantara sifat tersebut adalah sifat *Locally Small Riemann Sums* (LSRS) Pengertian LSRS untuk fungsi bernilai Real pada himpunan bilangan Real yang terintegral Henstock diberikan dan dibukukan oleh Lee (1989). Indrati (2002) mengitlakkanya untuk fungsi bernilai real pada ruang

[1] STAIN Bukit Tinggi, Indonesia, anesa.mq81@gmail.com

Euclide berdimensi n, kemudian Suherman (2003) mengembangkannya untuk fungsi bernilai vektor pada ruang Euclide berdimensi n, sedangkan untuk fungsi bernilai barisan ℓ^p, ($1 \le p < \infty$) dikembangkan oleh Aniswita (2006).

Berdasarkan uraian diatas akan diselidiki teorema kekonvergenan fungsi terintegral Henstock serentak dengan fungsi yang bersifat *Locally Small Riemann Sums* (LSRS) dari ruang Euclide $\Re^n$ ke ruang barisan ℓ^p, ($1 \le p < \infty$).

Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan $\Re$. Untuk bilangan asli n, $\Re^n$ menyatakan himpunan semua pasangan atas n bilangan real, yaitu

$\Re^n = \Re \times \Re \ \ldots \times \Re$. (n factor) = $\left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \Re \ dan \ 1 \le i \le n\right\}$.

Untuk titik $\overline{x} \in \Re^n$, persekitaran (neighborhood) titik $\overline{x}$ dengan jari- jari r> 0, dinotasikan dengan $B(\overline{x}, r)$ dan didefinisikan

$$B(\overline{x}, r) = \left\{\overline{y} : \overline{y} \in \Re^n \ dan \ \left\|\overline{x} - \overline{y}\right\|_\infty < r\right\}.$$

Untuk ($1 \le p < \infty$), ℓ^p merupakan koleksi semua barisan $\overline{x} = \{x_k\} \in$ W sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ atau ditulis,

$\ell^p = \left\{\overline{x} = \{x_k\} \in W, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}$. (Kreyszig, E, 1978).

Perlu diperhatikan bahwa fungsi $\overline{f} : E \subset \Re^n \to \ell^p$ merupakan barisan fungsi $\{f_k\}$ dengan $f_k : E \subset \Re^n \to \Re$, untuk setiap $k (k = 1,2,3,\ldots)$ sehingga $\overline{f}(\overline{x}) = \{f_k(\overline{x})\} \in \ell^p$ untuk setiap $\overline{x} \in E$.

Selanjutnya jika $\overline{f}$, $\overline{g}$ fungsi dari $E \subset \Re^n$ ke ℓ^p didefinisikan nilai fungsi $k\overline{f}$ dan $\overline{f} + \overline{g}$ sebagai berikut

(i) $(k\overline{f})(\overline{x}) = k\overline{f}(\overline{x})$, untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan k suatu skalar.

(ii) $(\overline{f} + \overline{g})(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}) + \overline{g}(\overline{x})$, untuk setiap $\overline{x} \in E$.

Untuk setiap $\overline{f} = \{f_k\}$ dan $\overline{g} = \{g_k\}$, untuk setiap $k \in N$ didefinisikan

(i) $\overline{f} = \overline{g}$ jika dan hanya jika $f_k = g_k$, yaitu $f_k(\overline{x}) = g_k(\overline{x})$, untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

(ii) $\overline{f} < \overline{g}$ jika dan hanya jika $f_k < g_k$, yaitu $f_k(\overline{x}) < g_k(\overline{x})$, untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

(iii) $\overline{f} \leq \overline{g}$ jika dan hanya jika $f_k \leq g_k$, yaitu $f_k(\overline{x}) \leq g_k(\overline{x})$, untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

Berikut ini diberikan definisi kekonvergenan barisan fungsi. Diberikan fungsi $\overline{f}_n, \overline{f} : E \subset \Re^n \to \ell^p$ untuk setiap $n \in N$.

i) Barisan fungsi $\{\overline{f}_n\}$ dikatakan ***konvergen*** ke fungsi $\overline{f}$ pada *E*, ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n = \overline{f}$ atau $\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x})$, jika untuk setiap $\overline{x} \in E$ barisan $\{\overline{f}_n(\overline{x})\}$ konvergen ke $\overline{f}(\overline{x})$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $\overline{x} \in E$ terdapat bilangan asli $m = m(\varepsilon, \overline{x})$ sehingga jika $n \geq m$ berakibat $\left\|\overline{f}_n(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{x})\right\|_p < \varepsilon$.

ii) Barisan fungsi $\{\overline{f}_n\}$ dikatakan ***konvergen seragam*** *ke fungsi* $\overline{f}$ *pada E* jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $m = m(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq m$ berakibat $\left\|\overline{f}_n(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{x})\right\|_p < \varepsilon$, untuk setiap $\overline{x} \in E$.

Selanjutnya karena sel E tertutup dan terbatas maka sel E merupakan himpunan kompak sehingga untuk setiap barisan fungsi yang konvergen pada sel E merupakan barisan fungsi yang konvergen seragam pada sel yang sama.

Berikut diberikan definisi, sifat dasar dan sifat lanjut dari integral Henstock dari ruang Euclide $\Re^n$ ke ruang barisan ℓ^p, $(1 \leq p < \infty)$.

Definisi 1.1 *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$ *dan* $E \subset \Re^n$ *sel. Fungsi* $\overline{f} : E \subset \Re^n \to \ell^p$ *dikatakan terintegral Henstock pada E, ditulis dengan* $\overline{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ *jika terdapat* $\overline{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ *dengan sifat untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap partisi Perron* δ *-fine* $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\} = \{(D_i, \overline{x}_i) : i = 1,2,\ldots,r\}$ *pada E berlaku*

$$\left\| (\mathfrak{D}) \sum \overline{f}(\overline{x})\ \alpha(D) - \overline{a} \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{r} \overline{f}(\overline{x}_i)\ \alpha(D_i) - \overline{a} \right\|_p < \varepsilon .$$

Selanjutnya nilai $\overline{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ yang dimaksud di atas disebut nilai integral-α Henstock fungsi $\overline{f}$ pada *E* di tulis dengan $\overline{a} = (R^*) \int_E \overline{f}\ d\alpha$.

Definisi 1.2 *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$, $E \subset \Re^n$ *sel, dan fungsi* $f_k : \Re^n \to \Re$ *untuk setiap k, (k=1,2, ...). Barisan fungsi {f*$_k$*} dikatakan terintegral-*α *Henstock serentak (Henstock Equi* α*-integrable) pada E dengan F*$_k$ *sebagai primitifnya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap partisi Perron* δ*-fine* $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ *pada E berlaku*

$\left| (\mathfrak{D}) \sum f_k(\overline{x}) \alpha(D) - F_k(E) \right| < \varepsilon$ *,untuk setiap k.*

Teorema 1.3 (Kriteria Cauchy) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$ *dan* $E \subset \Re^n$ *sel. Fungsi* $\overline{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap dua partisi* $\mathfrak{D}_1 = \{(D_1, \overline{x})\}$ *dan* $\mathfrak{D}_2 = \{(D_2, \overline{x})\}$ *pada E berlaku*

$$\left\| (\mathfrak{D}_1) \sum \overline{f}(\overline{x})\ \alpha(D_1) - (\mathfrak{D}_2) \sum \overline{f}(\overline{x})\ \alpha\ (D_2) \right\|_p < \varepsilon .$$

Teorema 1.4 (Lemma Henstock) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$ *dan sel* $E \subset \Re^n$. *Jika* $\overline{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ *dengan* $\overline{F}$ *sebagai primitifnya, yaitu untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap partisi Perron* δ*-fine* $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ *pada E berlaku* $\left\| (\mathfrak{D}) \sum \overline{f}(\overline{x})\ \alpha(D) - \overline{F}(E) \right\|_p < \varepsilon$, *maka untuk setiap jumlah bagian* $\sum_1$ *dari* $(\mathfrak{D}) \sum$ *berlaku* $\left\| (\mathfrak{D}) \sum_1 \overline{f}(\overline{x})\ \alpha(D) - \overline{F}(E) \right\|_p < 2\varepsilon$.

Teorema 1.5 (Peluasan Harnack) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$, *sel* $E \subset \Re^n$, *dan fungsi* $\overline{f} : E \subset \Re^n \to \ell^p$. *Himpunan X merupakan* *himpunan tertutup di dalam E dan {E_i} merupakan barisan himpunan tertutup sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \setminus X$ *. Jika* $\overline{f} \in R^*(X, \ell^p, \alpha)$ *dan* $\overline{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$*, untuk setiap i dengan* $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \overline{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ *maka*

$\overline{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ *dan* $(R^*) \int_E \overline{f}\, d\alpha = (R^*) \int_X \overline{f} \chi_x\, d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \overline{f}\, d\alpha$.

Akibat 1.6 (Sifat Cauchy) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$*, sel* $E \subset \Re^n$*, dan fungsi* $\overline{f} : E \subset \Re^n \to \ell^p$*. Barisan {$E_i$} merupakan barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E^0$ *, dengan* E^0 *menyatakan himpunan titik-dalam (interior point) sel E.. Jika* $\overline{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$*, untuk setiap i dengan* $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \overline{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ *maka* $\overline{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ *dan*

$$(R^*) \int_E \overline{f}\, d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \overline{f}\, d\alpha$$

B. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang beberapa teorema kekonvergenan diantaranya yaitu kekonvergenan terintegral serentak dan teorema kekonvergenan fungsi yang memiliki sifat *Unifomly Locally Small Riemann Sums (ULSRS).*

Definisi 2.1 *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$*, sel* $E \subset \Re^n$*, dan fungsi* $\overline{f}_k : E \subset \Re^n \to \ell^p$ *untuk setiap k, (k=1,2,...). Barisan fungsi* $\{\overline{f}_k\}$ *dikatakan* ***terintegral-*α *serentak*** *(Henstock Equi* α*-integrable) pada sel E jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap partisi Perron* δ *–fine* $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ *pada E berlaku*

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\alpha(D) - (R^*)\int_E \overline{f}_k(\overline{x})d\alpha \right\|_p < \varepsilon,$$

untuk setiap k.

Definisi 2.2 *Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$, sel $E \subset \Re^n$ dan fungsi $\overline{f}_k : E \subset \Re^n \to \ell^p$ untuk setiap k, (k=1, 2, 3, ...).*

Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam atau Unifomly Locally Small Riemann Sums (ULSRS) pada sel $E \subset \Re^n$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\overline{y} \in E$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in C$ berlaku

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\alpha(D) \right\|_p < \varepsilon,$$

untuk setiap k.

Lemma 2.3 *Jika Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \Re^n$ dan $\overline{f}_k \to \overline{f}$ h.d. pada sel E maka fungsi $\overline{f}$ bersifat LSRS.*

Bukti:

Tanpa mengurangi arti dapat dianggap bahwa $\overline{f}_k \to \overline{f}$ pada sel E , karena jika $\overline{f}$ fungsi terintegral Henstock pada sel E dan $\overline{g} = \overline{f}$ h.d. pada sel E maka $\overline{g}$ terintegral Henstock, lebih lanjut $\overline{g}$ merupakan fungsi bersifat LSRS pada sel E.

Jadi $\overline{f}_k \to \overline{f}$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\overline{x} \in E$ terdapat bilangan positif $k_{0,\overline{x}}$ dengan sifat untuk setiap $k \geq k_{0,\overline{x}}$ berlaku

$$\left\| \overline{f}_k(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{x}) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2^k \alpha(E)}.$$

Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \Re^n$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\overline{y} \in E$ berlaku

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k\left(\overline{x}\right)\alpha(D)\right\|_p < \varepsilon\ .$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in C$ untuk setiap k. Lebih lanjut untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel E, cacah titik terkait adalah hingga. Dengan demikian menurut lemma Henstock, untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in C$ berlaku

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}\left(\overline{x}\right)\alpha(D)\right\|_p \leq$$

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}\left(\overline{x}\right)\alpha(D) - (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k\left(\overline{x}\right)\alpha(D)\right\|_p + \left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k\left(\overline{x}\right)\right\|_p$$

$$< 3\varepsilon\ .$$

Dengan $k = maks\{k_{0,\overline{x}} : \overline{x} \in D\}$. □

Teorema 2.4 *Jika Barisan fungsi terukur* $\{\overline{f}_k\}$ *adalah barisan fungsi terintegral Henstock serentak pada sel* $E \subset \Re^n$ dan $\overline{f}_k \to \overline{f}$ *h.d. pada sel E untuk* $k \to \infty$ *maka* $\overline{f}$ *terintegral Henstock pada sel E dan* $\lim\limits_{k\to\infty} (R^*)\int_E \overline{f}_k d\alpha = (R^*)\int_E \overline{f} d\alpha$.

Bukti:

Tanpa mengurangi arti dianggap $\overline{f}_k \to \overline{f}$ pada sel E. Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\overline{x} \in E$ terdapat bilangan positif $k_{\overline{x}}$ dengan sifat untuk setiap $k \geq k_{\overline{x}}$ berlaku

$$\left\|\overline{f}_k\left(\overline{x}\right) - \overline{f}\left(\overline{x}\right)\right\|_p < \frac{\varepsilon}{\alpha(E)}\ .$$

Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ adalah barisan fungsi terintegral Henstock serentak pada sel $E \subset \Re^n$ sehingga terdapat fungsi positif δ pada sel *E* dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada *E* berlaku

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\,\alpha(D) - \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k d\alpha \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$, untuk setiap k

Cacah titik terkait untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \left\{\left(D, \overline{x}\right)\right\}$ pada *E* adalah hingga maka dapat diambil $K = maks\left\{k_{\overline{x}} : \overline{x} \in D\right\}$.

Dengan demikian untuk $k, m \geq N$ diperoleh

$$\left\| \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k\, d\alpha - \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_m \right\|_p \leq$$

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\,\alpha(D) - \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k d\alpha \right\|_p$$

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\,\alpha(D) - (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_m\left(\overline{x}\right)\alpha(D) \right\|_p +$$

$$\left\| (\mathfrak{D})\sum \overline{f}_m(\overline{x})\,\alpha(D) - \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_m d\alpha \right\|_p$$

$$\leq \sum \frac{\varepsilon}{2^k} + (\mathfrak{D})\sum \left\| \overline{f}_n\left(\overline{x}\right) - \overline{f}_m\left(\overline{x}\right) \right\|_p \alpha(D) + \sum \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha(E)}\sum \alpha(D) + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Jadi $\left\{\overline{f}_k\right\}$ merupakan barisan Cauchy, akibatnya $\left\{\overline{f}_k\right\}$ konvergen, katakan ke $\overline{a}$. Berarti terdapat bilangan positif k_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$\left\| \left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k d\alpha - \overline{a} \right\|_p < \varepsilon .$$

Untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \left\{\left(D, \overline{x}\right)\right\}$ pada *E* diambil $K = maks\left\{k_0, k_{\overline{x}} : \overline{x} \in D\right\}$ maka untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathfrak{D} = \left\{\left(D, \overline{x}\right)\right\}$ pada *E* berlaku

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}(\overline{x})\,\alpha(D)-\overline{a}\right\|_p \leq$$

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}(\overline{x})\,\alpha(D)-(\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\alpha(D)\right\|_p +$$

$$\left\|(\mathfrak{D})\sum \overline{f}_k(\overline{x})\,\alpha(D)-(R^*)\int_E \overline{f}_k d\alpha\right\|_p + \left\|(R^*)\int_E \overline{f}_k-\overline{a}\right\|_p$$

$$< 3\varepsilon .$$

Dengan kata lain terbukti $\overline{f}$ terintegral Henstock pada sel E dan $\lim_{k\to\infty}(R^*)\int_E \overline{f}_k d\alpha=(R^*)\int_E \overline{f} d\alpha$.

Teorema 2.5 *Jika Barisan fungsi terukur* $\{\overline{f}_k\}$ *bersifat LSRS seragam pada sel* $E\subset\Re^n$ *maka* $\{\overline{f}_k\}$ *terintegral Henstock serentak pada sel E.*

Bukti:

Diketahui Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel E, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ_* pada E dengan sifat untuk setiap $\overline{y}\in E$ dan untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathfrak{D}_*=\{(D,\overline{x})\}$ pada sel $C\subset B(\overline{y},\delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y}\in C$ berlaku

$$\left\|(\mathfrak{D}_*)\sum \overline{f}_k(\overline{x})\alpha(D)\right\|_p<\varepsilon ,$$

untuk setiap k.

Barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ konvergen h.d. pada sel E sehingga menurut Teorema Egoroff terdapat himpunan terbuka O dengan $\alpha(O)<\frac{\varepsilon}{2^k}$ dengan sifat $\{\overline{f}_k\}$ konvergen seragam pada $E\setminus O$. Jadi terdapat bilangan positif K_0 dengan sifat untuk setiap $k\geq K_0$ berlaku

$$\left\|\overline{f}_k(\overline{x})-\overline{f}(\overline{x})\right\|_p<\frac{\varepsilon}{7\alpha(D)}$$, untuk setiap $\overline{x}\in E\setminus O$.

Untuk setiap k, $\overline{f}_k\in R^*(E,\ell^p,\alpha)$ sehingga terdapat fungsi positif δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap dua partisi δ_k-fine $\mathfrak{D}^1_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{D}^2_{\mathfrak{k}}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathfrak{D}_{k}^{1}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}_{k}^{2}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Diambil fungi positif δ pada sel E dengan

$$\delta(\overline{x}) = \begin{cases} \min\left\{\delta_{*}(\overline{x}), \delta_{1}(\overline{x}), \ldots, \delta_{K_0}(\overline{x})\right\}, untuk\ setiap\ \overline{x} \in E \setminus O \\ \min\left\{\delta_{*}(\overline{x}), \delta_{1}(\overline{x}), \ldots, \delta_{K_0}(\overline{x}), d(\overline{x}, \delta(O))\right\}, untuk\ setiap\ \overline{x} \in O \end{cases}.$$

Maka untuk setiap dua partisi δ -fine $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{D}^2$ pada E

1. Jika $k < K_0$ diperoleh

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} < \frac{\varepsilon}{7}.$$

2. Jika $k \geq K_0$

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} < \frac{\varepsilon}{7}$$

$$\leq$$

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum \overline{f}_{K_0}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} +$$

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum \overline{f}_{K_0}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum \overline{f}_{K_0}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} +$$

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum \overline{f}_{K_0}(\overline{x})\, \alpha(D) - \left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} +$$

$$< \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum_{\overline{x} \in E \setminus O} \left\| \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) - \overline{f}_{K_0}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} + \frac{\varepsilon}{7} +$$

$$\left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum_{\overline{x} \in O} \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} + \left\| \left(\mathfrak{D}^{1}\right) \sum_{\overline{x} \in O} \overline{f}_{K_0}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} +$$

$$\left(\mathfrak{D}^{2}\right) \sum_{\overline{x} \in E \setminus O} \left\| \overline{f}_{k}(\overline{x}) \alpha(D) - \overline{f}_{K_0}(\overline{x}) \alpha(D) \right\|_{p} +$$

$$\left\|\left(\mathfrak{D}^1\right)\sum_{x\in O}\overline{f}_k\left(\overline{x}\right)\alpha(D)\right\|_p + \left\|\left(\mathfrak{D}^1\right)\sum_{x\in O}\overline{f}_{K_0}\left(\overline{x}\right)\alpha(D)\right\|_p$$

$$< \frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}+\frac{\varepsilon}{7}=\varepsilon .$$

Jadi terbukti jika barisan fungsi terukur $\{\overline{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel E maka $\{\overline{f}_k\}$ terintegral Henstock serentak pada sel E.

Teorema 2.6 *Jika Barisan fungsi terukur* $\{\overline{f}_k\}$ *bersifat LSRS seragam pada sel* $E \subset \mathfrak{R}^n$ *dan* $\overline{f}_k \to \overline{f}$ *h.d. pada sel E untuk* $k \to \infty$ *maka fungsi* $\overline{f}$ *terintegral Henstock pada sel E dan* $\lim_{k\to\infty}\left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k d\alpha = \left(R^*\right)\int_E \overline{f} d\alpha$ *.*

Bukti:

Lemma 2.3 mengakibatkan fungsi $\overline{f}$ bersifat LSRS pada sel E dan sesuai dengan Teorema 2.5 diperoleh fungsi $\overline{f}$ terintegral Henstock pada sel E dan dengan menggunakan Teorema 2.4 dan Teorema 2.5 diperoleh $\lim_{k\to\infty}\left(R^*\right)\int_E \overline{f}_k d\alpha = \left(R^*\right)\int_E \overline{f} d\alpha$ ..

C. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang barisan ℓ^p, (1 $\le$p<∞).

Permasalahan-permasalahan lain yang perlu dikembangkan antara lain kajian mengenai teorema kekonvergenan Globally Small Riemann Sums fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang Barisan ℓ^p ,(1$\le$p<∞) serta aplikasinya pada disiplin ilmu lain.

DAFTAR PUSTAKA

Gordon, R. A, 1994, *The Integral of Lebesque, Denjoy, Perron and Henstock***,** American Mathematical Society, USA

Indrati, Ch. R, 2002**,** *Integral Henstock-Kurzweil di Dalam Ruang Euclide Berdimensi- n,* Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

Kreyszig, E, 1978, *Introduction Functional Analysis with Application*, John Wiley and Sons

Lee, P. Y, 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Word Scientific, Singapore.

Pfeffer, W. F, 1993, *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, New York, USA

Royden, H. L, 1989, *Real Analysis*, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, USA